

第三章

導體介質中的平面電磁波

3.1. 無邊界導體介質中的均勻平面電磁波

假設在導體介質中，無自由電荷存在，即 $\rho_f = 0$ ，但有電流密度 \vec{J}_f 存在，而 $\vec{J}_f = \sigma \vec{E}$ 。在此區域中， μ 、 ϵ 及 σ 皆為同質性(homogeneous)，各向同性(isotropic)及線性(linear)者。本章僅考慮 x 偏振波。

在上述假設下，導體介質中的麥克斯韋方程組變成下列型式：

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon \hat{E}) = 0 \quad \text{或} \quad (\vec{\nabla} \cdot \hat{E} = 0) \quad (3-1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \hat{B} = 0 \quad (3-2)$$

$$\vec{\nabla} \times \hat{E} = -j\omega \hat{B} = -j\omega \mu \hat{H} \quad (3-3)$$

$$\vec{\nabla} \times \hat{H} = \hat{J} + j\omega \hat{D} = \sigma \hat{E} + j\omega \epsilon \hat{E} \quad (3-4)$$

將以上四式與下列真空空間的麥克斯韋方程組作比較

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \hat{E}) = 0 \quad \text{或} \quad (\vec{\nabla} \cdot \hat{E} = 0) \quad (3-5)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \hat{B} = 0 \quad (3-6)$$

$$\vec{\nabla} \times \hat{E} = -j\omega \mu_0 \hat{H} \quad (3-7)$$

$$\vec{\nabla} \times \hat{H} = j\omega \epsilon_0 \hat{E} \quad (3-8)$$

若將(3-4)式改寫成以下型式

$$\vec{\nabla} \times \hat{H} = \sigma \hat{E} + j\omega \epsilon \hat{E} = j\omega \left(\epsilon - j \frac{\sigma}{\omega} \right) \hat{E} = j\omega \hat{\epsilon}_c \hat{E} \quad (3-8')$$

則兩組麥克斯韋方程就非常類似。式中 $\hat{\epsilon}_c = \epsilon - j \frac{\sigma}{\omega}$ 稱為**複數介電常數 (complex permittivity)**

從以上比較之結果我們發現，只要將真空區域的麥克斯韋方程中兩個參數作以下之轉換就成了導體介質中之麥克斯韋方程。

$$\mu_0 \rightarrow \mu$$

$$\epsilon_0 \rightarrow \hat{\epsilon}_c = \epsilon - j \frac{\sigma}{\omega} = \epsilon' - j\epsilon'' \quad (3-9)$$

因此在真空區域的麥克斯韋方程之解中，將 $\mu_0 \rightarrow \mu$ ，及 $\epsilon_0 \rightarrow \hat{\epsilon}_c$ ，就成為導體區域之麥克斯韋方程之解。

真空區域之麥克斯韋方程之解，其電場部份為

$$\begin{aligned} \hat{E}_x(z) &= \hat{E}_x^+(z) + \hat{E}_x^-(z) \\ &= \hat{E}_0^+ e^{-j\beta_0 z} + \hat{E}_0^- e^{j\beta_0 z} \\ &= \hat{E}_0^+ e^{-j\omega \sqrt{\mu \epsilon_0} z} + \hat{E}_0^- e^{j\omega \sqrt{\mu \epsilon_0} z} \end{aligned}$$

則在無邊界導體介質中之解為

$$\hat{E}_x(z) = \hat{E}_x^+(z) + \hat{E}_x^-(z)$$

$$= \hat{E}_o^+ e^{-j\omega \sqrt{\mu(\epsilon - j\frac{\sigma}{\omega})}z} + \hat{E}_o^- e^{j\omega \sqrt{\mu(\epsilon - j\frac{\sigma}{\omega})}z} \quad (3-10)$$

令
$$\hat{\gamma} = j\omega \sqrt{\mu(\epsilon - j\frac{\sigma}{\omega})}, \quad (\text{rad/m}) \quad (3-11)$$

$\hat{\gamma}$ 稱為傳播常數(propagation constant), 將其寫成直角型

$$\hat{\gamma} = \alpha + j\beta$$

將上式代入(3-11)式可解得

$$\alpha = \frac{\omega \sqrt{\mu\epsilon}}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{NP/m}) \quad (3-12)$$

$$\beta = \frac{\omega \sqrt{\mu\epsilon}}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{rad/m}) \quad (3-13)$$

α 稱為衰減常數(attenuation constant), β 稱為相位常數(phase constant).

導體介質中的平面電磁波可用 $\hat{\gamma}, \alpha$ 及 β 表示如下

$$\begin{aligned} \hat{E}_x(z) &= \hat{E}_x^+(z) + \hat{E}_x^-(z) \\ &= \hat{E}_o^+ e^{-\hat{\gamma}z} + \hat{E}_o^- e^{\hat{\gamma}z} \\ &= (E_o^+ e^{j\phi^+}) e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + (E_o^- e^{j\phi^-}) e^{\alpha z} e^{j\beta z} \end{aligned} \quad (3-14)$$

$$\begin{aligned} E_x(z,t) &= \text{Re} \left[\hat{E}_x(z) e^{j\omega t} \right] \\ &= \text{Re} \left[E_o^+ e^{j\phi^+} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{j\omega t} + E_o^- e^{j\phi^-} e^{\alpha z} e^{j\beta z} e^{j\omega t} \right] \\ &= E_o^+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \phi^+) \\ &\quad + E_o^- e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \phi^-) \end{aligned} \quad (3-15)$$

式中 $e^{-\alpha z}$ 及 $e^{\alpha z}$ 稱為衰減因子(attenuation factor).

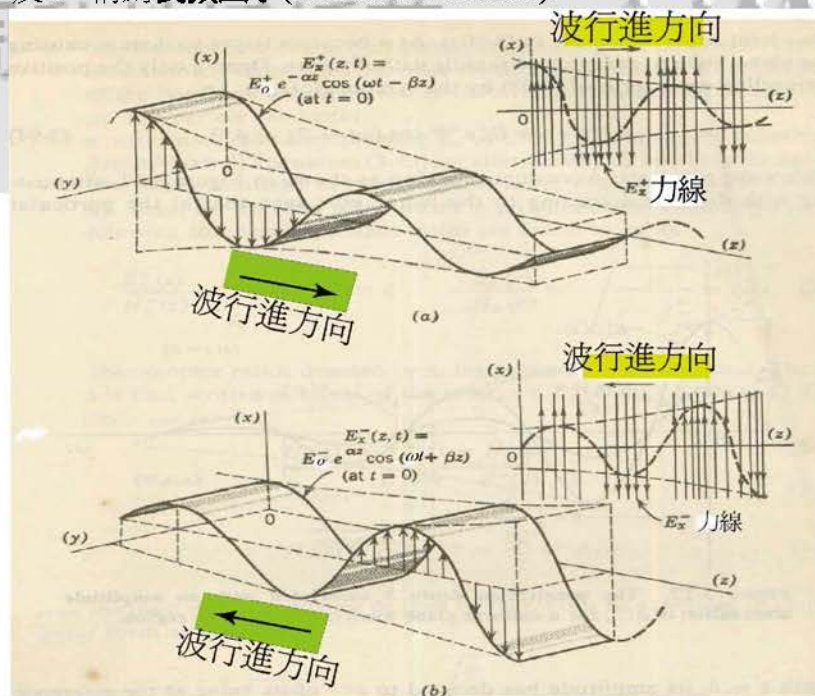


圖 3-1

平面電磁波在介電質中的波函數，與在導體介質中的函數之主要差異之一為：導體介質中的波函數有衰減因子這一項。故平面波在導體介質中一邊行進時，強度一邊衰減，如圖 3-1 所示。圖 3-1a 及圖 3-1b 分別為向正 z 及負 z 方向行進而逐漸衰減之波形。

平面電磁波在導體介質內行進時，由於介質有不為零的電傳導係數 σ ，使得波在行進方向逐漸衰減。若衰減常數 α 及相常數 β 中的電傳導係數 $\sigma = 0$ 時，則 $\alpha = 0$ ， $\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ ，此狀況即為平面電磁波在理想介電質內行進的情況。

平面電磁波在導體介質中行進時衰減的程度，端視 $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ 之值比 1 大多少而定。由 $\alpha = \frac{\omega\sqrt{\mu\epsilon}}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}}$ 來看，若 σ 增大，則 α 亦增大，衰減因子就衰減得越快，波的振幅也衰減得越快。

從衰減因子 $e^{-\alpha z}$ 來看，當波行進一個特別距離 $z = \delta$ 時，其振幅衰減到 $z = 0$ 處之 e^{-1} 倍時，即 $E^+ = E_0^+ e^{-1}$ 時，此特別距離 δ 稱為**穿透深度(depth of penetration)**或**皮膚深度(skin depth)**。令 $e^{-\alpha\delta} = e^{-1}$ ，得

$$\delta = \frac{1}{\alpha} \quad (\text{m}) \quad (3-16)$$

在導體介質中，由 $E_x^+(z, t)$ 而產生的電流密度 $J_x^+(z, t)$ 為

$$J_x^+(z, t) = \sigma E_x^+(z, t) = \sigma E_0^+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \phi^+), \quad (\text{A/m}^2) \quad (3-17)$$

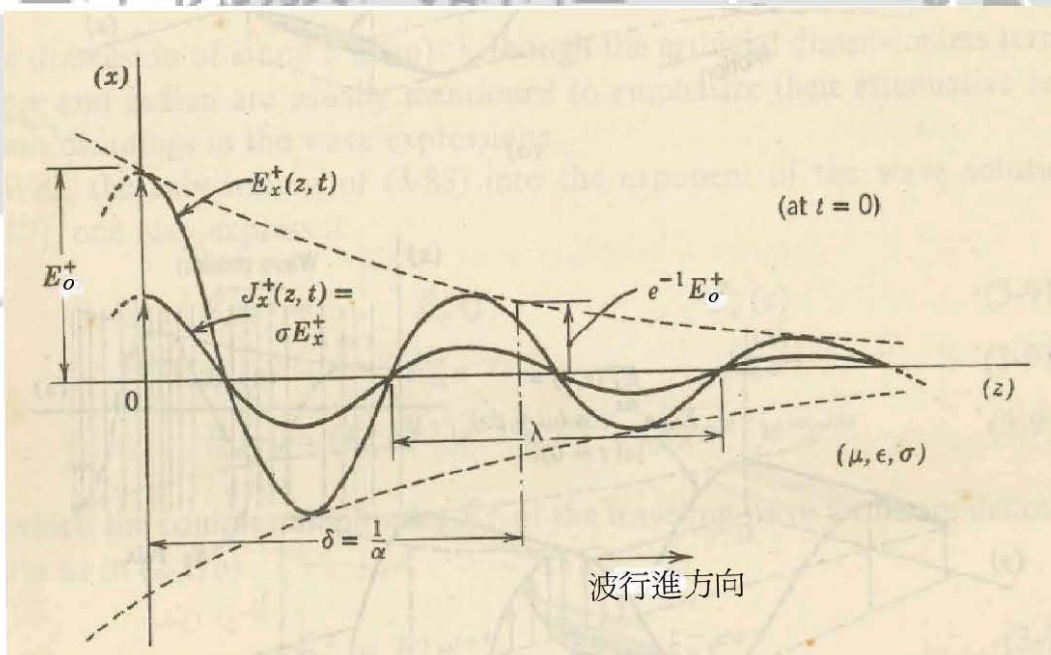


圖 3-2

由(3-17)式得知, \vec{J} 與 \vec{E} 相位相同. 在高傳導介質內, $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$, $\alpha \gg 1$, 穿透深度 $\delta = \frac{1}{\alpha} \ll 1$. 故當介質為理想導體時, 即 $\sigma \rightarrow \infty$ 時, $\alpha \rightarrow \infty$, 穿透深度 $\delta \approx 0$, 在此情況下, 電磁波無法行進至導體內部, 內部不會有電流密度, 僅有表面電流密度存在. 茲將電場 $E_x^+(z,t)$ 及 $J_x^+(z,t)$ 二函數圖形繪於圖 3-2.

由(2-3)式 $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega\mu_0\vec{H}$ 得

$$\begin{aligned}
 \text{得} \quad \hat{H}_y(z) &= -\frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial \hat{E}_x(z)}{\partial z} \\
 &= -\frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial (\hat{E}_0^+ e^{-\gamma z} + \hat{E}_0^- e^{\gamma z})}{\partial z} \\
 &= \frac{\gamma}{j\omega\mu} (\hat{E}_0^+ e^{-\gamma z} - \hat{E}_0^- e^{\gamma z}) \\
 &= \frac{j\omega\sqrt{\mu\epsilon_c}}{j\omega\mu} (\hat{E}_0^+ e^{-\gamma z} - \hat{E}_0^- e^{\gamma z}) \\
 &= \sqrt{\frac{\epsilon_c}{\mu}} \hat{E}_0^+ e^{-\gamma z} - \sqrt{\frac{\epsilon_c}{\mu}} \hat{E}_0^- e^{\gamma z} \\
 &= \sqrt{\frac{\epsilon - j\frac{\sigma}{\omega}}{\mu}} \hat{E}_0^+ e^{j\phi^+} e^{-\gamma z} - \sqrt{\frac{\epsilon - j\frac{\sigma}{\omega}}{\mu}} \hat{E}_0^- e^{j\phi^-} e^{\gamma z} \\
 &= \sqrt{\frac{\epsilon - j\frac{\sigma}{\omega}}{\mu}} \hat{E}_x^+(z) - \sqrt{\frac{\epsilon - j\frac{\sigma}{\omega}}{\mu}} \hat{E}_x^-(z) \\
 &= \hat{H}_y^+(z) + \hat{H}_y^-(z) \tag{3-18}
 \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_y^+(z) &= \sqrt{\frac{\epsilon - j\frac{\sigma}{\omega}}{\mu}} \hat{E}_x^+(z) \\
 \hat{H}_y^-(z) &= -\sqrt{\frac{\epsilon - j\frac{\sigma}{\omega}}{\mu}} \hat{E}_x^-(z) \\
 \frac{\hat{E}_x^+(z)}{\hat{H}_y^+(z)} &= -\frac{\hat{E}_x^-(z)}{\hat{H}_y^-(z)} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon - j\frac{\sigma}{\omega}}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_c}} = \hat{\eta}_c \tag{3-19}
 \end{aligned}$$

$\hat{\eta}_c$ 為複數, 稱為**導體介質的固有波阻抗**(intrinsic wave impedance).

導體介質中平面電磁波的 \hat{H}_y 場可寫成以下型式:

$$\hat{H}_y(z) = \hat{H}_y^+(z) + \hat{H}_y^-(z)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\hat{E}_x^+(z)}{\hat{\eta}_c} - \frac{\hat{E}_x^-(z)}{\hat{\eta}_c} \\
 &= \frac{\hat{E}_o^+}{\hat{\eta}_c} e^{-jz} - \frac{\hat{E}_o^-}{\hat{\eta}_c} e^{jz} \quad (\text{A/m})
 \end{aligned}$$

將 $\hat{\eta}_c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon - j\frac{\sigma}{\omega}}}$ 用極型表示時可化成以下型式:

$$\hat{\eta}_c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon - j\frac{\sigma}{\omega}}} = \eta_c e^{j\theta_\eta} = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}}{\left[1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2\right]^{1/4}} e^{j\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)} \quad (3-20)$$

$$\eta_c = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}}{\left[1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2\right]^{1/4}} \quad (\Omega) \quad (3-21)$$

$$\theta_\eta = \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right) \quad (3-22)$$

當 $\sigma = 0$ 時, $\hat{\eta}_c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \eta$, 為理想介電質的固有波阻抗。

導體介質中平面電磁波的磁場強度可寫成以下型式:

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_y(z) &= \frac{\hat{E}_o^+}{\hat{\eta}_c} e^{-jz} - \frac{\hat{E}_o^-}{\hat{\eta}_c} e^{jz} \\
 &= \frac{E_o^+ e^{j\phi^+}}{\eta_c e^{j\theta_\eta}} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} - \frac{E_o^- e^{j\phi^-}}{\eta_c e^{j\theta_\eta}} e^{+\alpha z} e^{j\beta z} \\
 &= \frac{E_o^+}{\eta_c} e^{-\alpha z} e^{-j(\beta z - \phi^+ + \theta_\eta)} - \frac{E_o^-}{\eta_c} e^{+\alpha z} e^{j(\beta z + \phi^- - \theta_\eta)} \quad (\text{A/m}) \quad (3-23)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_y(z,t) &= \text{Re}[\hat{H}_y(z)e^{j\omega t}] \\
 &= \frac{E_o^+}{\eta_c} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \phi^+ - \theta_\eta) \\
 &\quad - \frac{E_o^-}{\eta_c} e^{+\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \phi^- - \theta_\eta) \quad (\text{A/m}) \quad (3-24)
 \end{aligned}$$

由以上結果得知, 在導體介質中傳播的平面電磁波, 磁場強度 $H(z,t)$ 落後 $E(z,t)$ θ_η 角。

在導體介質中傳播的平面電磁波, 其波長, 相速及週期分別為:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (\text{m})$$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} \quad (\text{m/s})$$

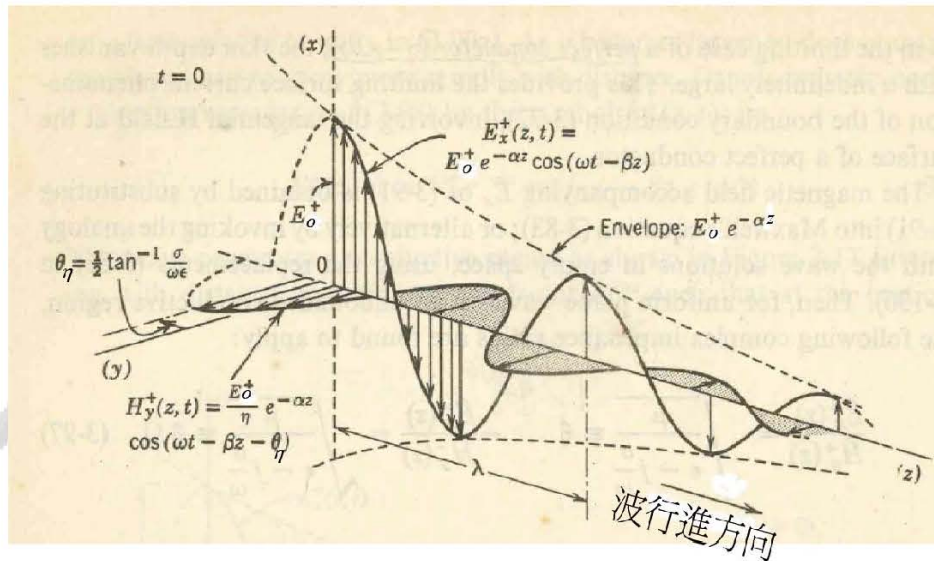
$$T = \frac{1}{f} \quad (s)$$

導體介質中向正 z 方向傳播的平面電磁波。其電場

$$E_x^+(z, t) = E_o^+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \phi^+)$$

及磁場強度 $H_y^+(z, t) = \frac{E_o^+}{\eta_c} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \phi^+ - \theta_\eta)$

之函數曲線繪出如圖 3-3 所示



物理系開放式課程

圖 3-3

例 3-1. 假設振幅為 $1,000e^{j0^\circ}$ (V/m), 頻率為 $f = 10^8$ (Hz) 的均勻平面電磁波在參數為 $\mu = \mu_o$, $\epsilon = 4\epsilon_o$, 及 $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} = 1$ 的導體介質中向正 z 方向行進。

(a) 求此波的相常數 β , 衰減常數 α 及固有波阻抗 $\hat{\eta}$. (b) 求 $\vec{E}(z, t)$ 及 $\vec{H}(z, t)$, (c) 求穿透深度, 波長及相速. 試將此波之波長及相速與在無耗損介質區(參數為 μ, ϵ)及(參數為 μ, ϵ 及 $\sigma = 0$)者作比較. 僅考慮 E_x 及 H_y 分量.

【解】(a) 衰減常數

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\omega\sqrt{\mu\epsilon}}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\omega\sqrt{\mu_o 4\epsilon}}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{1 + (1)^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2\omega}{\sqrt{2}c} (0.414)^{\frac{1}{2}} = 1.90 \text{ (Np/m)} \end{aligned}$$

相常數

$$\beta = \frac{\omega\sqrt{\mu\epsilon}}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2\omega}{\sqrt{2}c} (2.414)^{\frac{1}{2}} = 4.58 \text{ (rad/m)}$$

傳播常數 $\hat{\gamma} = \alpha + j\beta = 1.9 + j4.58 \text{ (m}^{-1}\text{)}$

波的固有阻抗

$$\hat{\eta}_c = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}}{\left[1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2\right]^{\frac{1}{4}}} e^{j\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} e^{j\frac{1}{2}\tan^{-1}(1)}$$

$$= \frac{60\pi}{1.19} e^{j\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 159 e^{j\frac{\pi}{8}} \text{ (}\Omega\text{)}$$

(b) $\hat{E}_x^+(z) = 1,000 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \text{ (V/m)}$

$$\hat{H}_y^+(z) = \frac{\hat{E}_x^+(z)}{\hat{\eta}_c} = \frac{1,000 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}}{159 e^{j\frac{\pi}{8}}}$$

$$= \frac{1,000 e^{-1.90z} e^{-j4.58z}}{159 e^{j\frac{\pi}{8}}}$$

$$= 6.29 e^{-1.90z} e^{-j(4.58z + \frac{\pi}{8})} \text{ (A/m)}$$

$$\hat{E}_x^+(z, t) = \text{Re} \left[\hat{E}_x^+(z) e^{j\omega t} \right] = \text{Re} \left[1,000 e^{-1.90z} e^{-j4.58z} e^{j2\pi \times 10^8 t} \right]$$

$$= 1,000 e^{-1.90z} \cos(2\pi \times 10^8 t - 4.58z) \text{ (V/m)}$$

$$\hat{H}_y^+(z, t) = \text{Re} \left[\hat{H}_y^+(z) e^{j\omega t} \right] = \text{Re} \left[6.29 e^{-1.90z} e^{-j(4.58z + \frac{\pi}{8})} e^{j2\pi \times 10^8 t} \right]$$

$$= 6.29 e^{-1.90z} \cos(2\pi \times 10^8 t - 4.58z - \frac{\pi}{8}) \text{ (A/m)}$$

(c) 導體介質中的穿透深度, 波長, 及相速分別為

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{1.90} = 0.52 \text{ (m)}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{4.58} = 1.37 \text{ (m)}$$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi(10^8)}{4.58} = 1.37 \times 10^8 \text{ (m/s)}$$

若介質為耗損 ($\mu_0, 4\epsilon_0, \sigma=0$) 者, 則

$$\lambda^{(0)} = \frac{2\pi}{\beta^{(0)}} = \frac{2\pi}{2\pi f \sqrt{\mu_0 4\epsilon_0}} = \frac{c}{2f} = \frac{3 \times 10^8}{2(10^8)} = 1.5 \text{ (m)}$$

$$v_p^{(0)} = \frac{\omega}{\beta^{(0)}} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{\mu_0 4\epsilon_0}} = \frac{c}{2} = 1.5 \times 10^8 \text{ (m/s)}$$

從以上結果得知, 在導體介質中傳播的電磁波其波長及行進速度要比在介

電質中行進者為小。

3-2. 導體介質的分類

導體介質中，安培及麥克斯韋定律為

$$\vec{\nabla} \times \hat{H} = \sigma \hat{E} + j\omega \epsilon \hat{E} = j\omega \left(\epsilon - j \frac{\sigma}{\omega} \right) \hat{E} = j\omega \hat{\epsilon}_c \hat{E}$$

式中 $\hat{\epsilon}_c \equiv \epsilon - j \frac{\sigma}{\omega} = \epsilon' - j\epsilon''$ 定義為**複數介電常數**

茲將 $\hat{\epsilon}_c$ 繪於複面如圖 3-4a

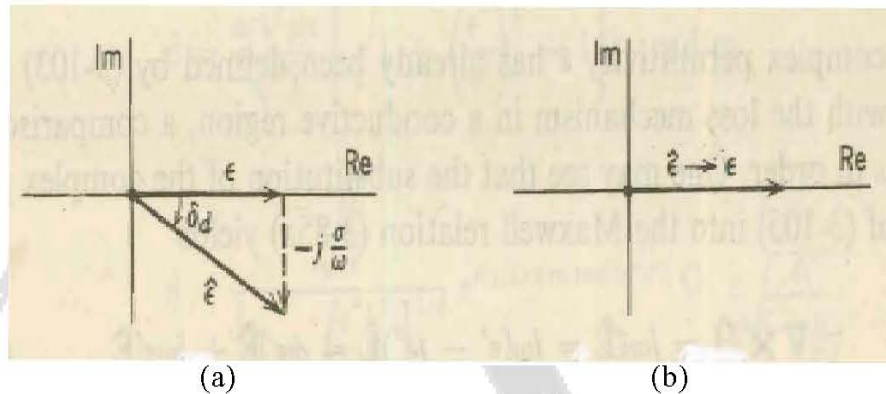


圖 3-4

$$\tan |\delta_d| = \frac{\sigma}{\omega \epsilon} = \frac{\epsilon''}{\epsilon'} \quad (3-25)$$

稱為某物質的**耗損角正切(loss tangent)**或**耗散因素(dissipation factor)**。

δ_d 稱為**耗散角(dissipation angle)**。在無耗損介質中，其值為零，如圖 3-4 所示。

α, β 及 $\hat{\eta}_c$ 的表示式中，都與耗損角正切有關。在導體介質中， α, β 及 $\hat{\eta}_c$ 是用 $\frac{\sigma}{\omega \epsilon}$ 表示。

$$\alpha = \frac{\omega \sqrt{\mu \epsilon}}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3-12)$$

$$\beta = \frac{\omega \sqrt{\mu \epsilon}}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2} + 1 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3-13)$$

$$\hat{\eta}_c = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}}{\left[1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2 \right]^{1/4}} e^{j \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)} \quad (3-21)$$

在耗損介質中， α, β 及 $\hat{\eta}_c$ 用 $\frac{\epsilon''}{\epsilon'}$ 表示較為合適。

$$\alpha = \frac{\omega \sqrt{\mu \epsilon}}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'} \right)^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3-26)$$

$$\beta = \frac{\omega\sqrt{\mu\epsilon}}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^2} + 1 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3-27)$$

$$\hat{\eta}_c = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}}{\left[1 + \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^2\right]^{\frac{1}{4}}} e^{j\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)} \quad (3-28)$$

角頻率為 ω 的電磁波在介質中傳播時，介質通常可分為以下兩類：

(a) 良導體(good conductor)

良導體的定義為： $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$ 或 $\epsilon'' \gg \epsilon'$ 。在此條件下 α, β 及 $\hat{\eta}_c$ 可以用以下之近似式表示：

$$\hat{\gamma} = j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \cong j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{\frac{\sigma}{j\omega\epsilon}} = \sqrt{j}\sqrt{\omega\mu\sigma} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega\mu\sigma}$$

$$\therefore \sqrt{j} = (e^{j\frac{\pi}{2}})^{\frac{1}{2}} = e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$\frac{1+j}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}) = e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$\hat{\gamma} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega\mu\sigma} = (1+j)\sqrt{\pi f\mu\sigma} = \alpha + j\beta$$

$$\therefore \alpha = \beta = \sqrt{\pi f\mu\sigma} = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \quad (3-29)$$

$$\hat{\eta}_c = \frac{\mu}{\sqrt{\epsilon - j\frac{\sigma}{\omega}}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{j}\sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}$$

$$= \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} (e^{j\frac{\pi}{2}})^{\frac{1}{2}}, (\text{極型}) \quad (\Omega)$$

$$= \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}) = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} (1+j) (\text{直角型}) \quad (\Omega) \quad (3-30)$$

從以上結果得知，良導體 $\hat{\eta}_c$ 之相角為 45° ，這點顯示良導體內電磁波磁場強度落後電場 45° 。

$$\text{良導體的穿透深度為 } \delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \quad (\text{m})$$

以銅為例， $\sigma = 5.8 \times 10^7 \text{ (s/m)}$ ， $\mu = 12.57 \times 10^{-7} \text{ (Wb/A}\cdot\text{m)}$

$f = 10^3 \text{ (Hz)}$ 時， $\delta = 2 \text{ (mm)}$

$f = 10^3 \text{ (MHz)}$ 時， $\delta = 0.002 \text{ (mm)}$

(b) 耗損介電質

耗損介電質的定義為： $\epsilon'' \ll \epsilon'$ 或 $\frac{\epsilon''}{\epsilon'} \ll 1$ 在此條件下 α, β 及 $\hat{\eta}_c$

可以用以下之近似式表示:

$$\alpha = \frac{\omega\sqrt{\mu\epsilon}}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \cong \frac{\omega\sqrt{\mu\epsilon}}{2} \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right) = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (\text{Np/m}) \quad (3-31)$$

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\omega\sqrt{\mu\epsilon}}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^2} + 1 \right]^{\frac{1}{2}} \cong \frac{\omega\sqrt{\mu\epsilon}}{\sqrt{2}} \left[2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\cong \omega\sqrt{\mu\epsilon} \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^2 \right] = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon'}\right)^2 \right] \quad (\text{rad/m}) \end{aligned} \quad (3-32)$$

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_c &= \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon - j\frac{\sigma}{\omega}}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left[1 + j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon} + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})}{2!} \left(j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2 \right] \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left[1 - \frac{3}{8} \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^2 + j\frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right) \right] \quad (\Omega) \end{aligned} \quad (3-33)$$

當 $\sigma=0$ 時, $\alpha=0$, $\beta=\omega\sqrt{\mu\epsilon}$, $\hat{\eta}_c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ 與理想介電質中的參數質一樣。

例 3-2. 一束均勻線性極化平面電磁波, 在海水 ($\epsilon_r = 80$, $\mu_r = 1$, $\sigma = 4 \text{ s/m}$) 中向正 z 方向傳播. 在 $z=0$ 處, 電場為 $\vec{E}(0,t) = \hat{a}_x 100 \cos(10^7 \pi t)$ (Vm), (a) 求衰減常數, 相常數, 固有波阻抗, 相速, 波長及穿透深度 (b) 當電場振幅衰減至 $z=0$ 處之 1% 時, 傳播了多遠, (c) 寫出 $\vec{E}(z,t)$ 及 $\vec{H}(z,t)$ 在 $z=0.8$ (m) 處之值。

【解】已知 $\omega = 10^7 \pi$ (rad/s), $f = \frac{\omega}{2\pi} = 5 \times 10^6$ (Hz),

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \frac{\sigma}{\omega\epsilon_0\epsilon_r} = \frac{4(\text{s/m})}{(10^7 \pi \text{ rad/s}) \left(\frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \text{ F/m}\right) 80} = 180 \gg 1$$

由以上耗損角正切之值得知, 海水為良導體

(a) 衰減常數

$$\alpha = \sqrt{\pi f \mu \sigma} = \sqrt{\pi(5 \times 10^6 \text{ Hz})(4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m})(4 \text{ s/m})} = 8.89 \text{ (Np/m)}$$

相常數

$$\beta = \alpha = 8.89 \text{ (rad/m)}$$

固有波阻抗

$$\hat{\eta}_c = (1+j) \sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma}} = (1+j) \sqrt{\frac{\pi(5 \times 10^6 \text{ Hz})(4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m})}{4 \text{ s/m}}} = \pi e^{j\frac{\pi}{4}} \Omega$$

相速

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{10^7 \pi (\text{rad/s})}{8.89 (\text{Np/m})} = 3.53 \times 10^6 \text{ (m/s)}$$

波長

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi (\text{rad})}{8.89 (\text{rad/m})} = 0.707 \text{ (m)}$$

穿透深度

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{8.89 (\text{Np/m})} = 0.112 \text{ (m)}$$

(b) $\hat{E}(z) = \hat{E}(0)e^{-\alpha z} = \hat{E}(0) \times 1\%$ 時

$$e^{-\alpha z} = 0.01, \quad e^{\alpha z} = 100$$

波行進的距離為

$$z = \frac{1}{\alpha} \ln 100 = \frac{4.605}{8.89} = 0.518 \text{ (m)}$$

(c) $\hat{E}(z) = \hat{a}_x 100 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \text{ (V/m)}$

$$\hat{H}(z) = \hat{a}_y \frac{\hat{E}(z)}{\hat{\eta}_c} = \hat{a}_y \frac{100}{\pi e^{j\frac{\pi}{4}}} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} = \hat{a}_y 31.83 e^{-\alpha z} e^{-j(\beta z + \pi/4)} \text{ (A/m)}$$

$$\vec{E}(z, t) = \text{Re} \left[\hat{E}(z) e^{j\omega t} \right]$$

$$= \text{Re} \left[\hat{a}_x 100 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{j\omega t} \right]$$

$$= \text{Re} \left[\hat{a}_x 100 e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)} \right]$$

$$= \hat{a}_x 100 e^{-8.89z} \cos(10^7 \pi t - 8.89z) \text{ (V/m)}$$

$$\vec{H}(z, t) = \text{Re} \left[\hat{H}(z) e^{j\omega t} \right]$$

$$= \text{Re} \left[\hat{a}_y 31.83 e^{-8.89z} e^{-j(8.89z + \pi/4)} e^{j10^7 \pi t} \right]$$

$$= \hat{a}_y 31.83 e^{-8.89z} \cos(10^7 \pi t - 8.89z - \frac{\pi}{4}) \text{ (A/m)}$$

在 $z = 0.8$ 處

$$\vec{E}(0.8, t) = \hat{a}_x 100 e^{-(8.89 \times 0.8)} \cos(10^7 \pi t - 8.89 \times 0.8)$$

$$= \hat{a}_x 0.082 \cos(10^7 \pi t - 7.11) \text{ (V/m)}$$

$$\vec{H}(0.8, t) = \hat{a}_y 31.83 e^{-8.89(0.8)} \cos(10^7 \pi t - 8.89 \times 0.8 - \frac{\pi}{4})$$

$$= \hat{a}_y 0.026 \cos(10^7 \pi t - 7.89) \text{ (A/m)}$$

例 3-3. 10 MHz 之廣播電磁波分別在湖水 ($\sigma = 4 \times 10^{-3} \text{ s/m}$, $\epsilon_r = 81$) 及海水 ($\sigma = 4 \text{ s/m}$, $\epsilon_r = 81$) 中傳播。試分別計算二介質中的衰減常數及穿透深度。

【解】電磁波的頻率為 $f = 10 \text{ MHz}$

湖水的耗損角正切為

$$\tan \delta_c = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{4 \times 10^{-3} (\text{s/m})}{(2\pi \times 10^7 \text{ rad/s})(8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m})(81)}$$

$$= 8.88 \times 10^{-2} \ll 1$$

故在傳播頻率為 10MHz 之電磁波時，湖水屬低耗損介電質。其穿透深度可用以下之近似式予以計算：

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{2}{\sigma} \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{\mu_0}} = \left(\frac{2}{4 \times 10^{-3} \text{ s/m}} \right) \left(\frac{\sqrt{81}}{377 \Omega} \right) = 11.9 \text{ m} \cong 12 \text{ m}$$

海水的耗損角正切為

$$\tan \delta_c = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{4 \text{ (s/m)}}{(2\pi \times 10^7 \text{ rad/s})(8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m})(81)} = 88.8 \gg 1$$

故在傳播頻率為 10MHz 之電磁波時，海水屬良導體。其穿透深度可用以下之近似式予以計算：

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{\alpha} \cong \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}} = \frac{1}{\sqrt{\pi \times 10^7 \text{ (rad/s)} \times 4\pi \times 10^{-7} \text{ (H/m)} \times 4 \text{ (s/m)}}} \\ &= \frac{1}{4\pi} \text{ (m)} \cong 8 \text{ (cm)} \end{aligned}$$

以上結果顯示，10MHz 的電磁波，在海水中的穿透深度只 8cm，訊號衰減得太快，不適合作海水中的通訊用。然而在湖水中的穿透深度為 12m，遠大於在海水之中之 8cm，故此訊號適合在淡水中做 10m 距離之通訊。

例 3-4. 頻率為 25GHz 的電磁波在蒸餾水 ($\epsilon_r = 34 - j9.01$) 中傳播。試計算衰減常數 α ，相常數 β ，穿透深度 δ 及波長 λ 。

【解】 $\epsilon_r = \epsilon' - j\epsilon'' = 34 - j9.01$ ，在 $f = 25 \times 10^9$ Hz 時，蒸餾水的耗損角正切為

$$\tan \delta_c = \frac{\epsilon''}{\epsilon'} = \frac{9.01}{34} = 0.265$$

衰減常數

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\omega \sqrt{\mu \epsilon}}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'} \right)^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{(2\pi \times 25 \times 10^9 \text{ rad/m}) \sqrt{34}}{\sqrt{2} (3 \times 10^8 \text{ m/s})} \left[\sqrt{1 + (0.265)^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} = 401 \text{ (Np/m)} \end{aligned}$$

相常數

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\omega \sqrt{\mu \epsilon}}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'} \right)^2} + 1 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{(2\pi \times 25 \times 10^9 \text{ rad/m}) \sqrt{34}}{\sqrt{2} (3 \times 10^8 \text{ m/s})} \left[\sqrt{1 + (0.265)^2} + 1 \right]^{\frac{1}{2}} = 3,709 \text{ (rad/m)} \end{aligned}$$

穿透深度

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{401 \text{ (Np/m)}} = 2.49 \text{ (mm)}$$

波長

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi(\text{rad})}{3,079(\text{rad/m})} 2.04 (\text{m})$$

例 3-5. 915MHz 的微波通過肌肉組織($\sigma = 1.6 \text{ s/m}$, $\epsilon_r = 51$), 求其複數傳播常數 $\hat{\gamma}$ 及固有波阻抗 $\hat{\eta}_c$.

【解】肌肉組織的耗損角正切為

$$\begin{aligned} \tan \delta_c &= \frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \frac{\sigma}{2\pi f \epsilon_0 \epsilon_r} \\ &= \frac{1.6(\text{s/m})}{2\pi \times 915 \times 10^6 (\text{rad/s}) \times 8.85 \times 10^{-12} (\text{F/m}) \times 51} = 0.617 \end{aligned}$$

$\tan \delta_c$ 之值不是遠大於 1 也不是遠小於 1, 故肌肉組織既非良導體亦非低耗損介電質.

衰減常數

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\omega\sqrt{\mu\epsilon}}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi f} \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{c} \left[\sqrt{1 + (0.617)^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{2} \times 3.1416(\text{rad}) \times 915 \times 10^6 (\text{rad/s}) \frac{\sqrt{51}}{3 \times 10^8 (\text{m/s})} (1.175 - 1)^{\frac{1}{2}} \\ &= 40.45 (\text{Np/m}) \end{aligned}$$

相常數

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\omega\sqrt{\mu\epsilon}}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1 \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi f} \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{c} \left[\sqrt{1 + (0.617)^2} + 1 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{2} \times 3.1416(\text{rad}) \times 915 \times 10^6 (\text{rad/s}) \frac{\sqrt{51}}{3 \times 10^8 (\text{m/s})} (1.175 + 1)^{\frac{1}{2}} \\ &= 142.7 (\text{rad/m}) \end{aligned}$$

傳播常數

$$\hat{\gamma} = \alpha + j\beta = 40.45 + j142.7 (\text{rad/m})$$

波自有阻抗

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_c &= \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}}{\left[1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2\right]^{\frac{1}{4}}} e^{j\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)} \\ &= \frac{377 / \sqrt{51}}{\left[1 + (0.617)^2\right]^{\frac{1}{4}}} \exp\left[j\frac{1}{2}\tan^{-1}(0.617)\right] \\ &= 48.7e^{j15.8^\circ} (\Omega) \end{aligned}$$

3.2. 電離氣體(Ionized Gases)

地球大氣層中, 大約從 50 至 500 公里之高度間, 有一層游離氣體存在, 這一層大氣稱為**電離層(ionosphere)**. 電離層中的大氣含有等量的自由電子及正離子稱為**電漿或等離子(plasma)**, 這些帶電離子是由氣體分子吸收太陽的紫外線而分解出的. 電漿密度不是定值, 而是與太陽之輻射有關, 並隨白晝, 夜晚, 季節及太陽黑子活動而變化.

電離層對電波通訊有極大影響. 由於電子的質量遠小於正離子, 當電

磁波經過電離層時，其電場對電子的加速遠大於正離子，故只考慮電磁波對電子的作用。同時電子與氣體原子及分子間碰撞的效應可予忽略。

3.3. 電漿振盪與電子電漿頻率(plasma oscillations and the electron plasma frequency)

假設電漿起初未受任何擾動時，電漿內的質點作均勻分佈，在任意巨觀的空間內，電漿含有等數量的電子與正離子(原子核)，每一個電子的電量 $q_e = -e = -1.6 \times 10^{19}$ C，每一個正離子的電量 $q_i = q_e = e$ ，故在忽略電子的熱運動，電漿的電性為中性。

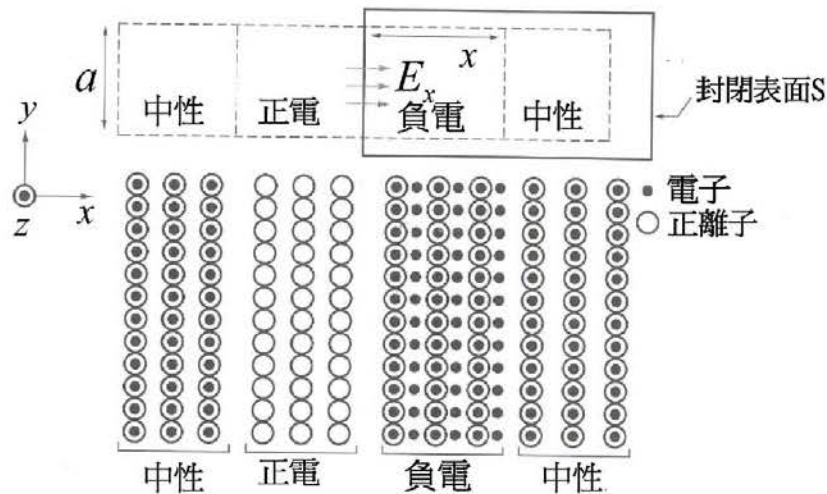


圖 3-5

現將一群電子傳送至緊鄰區域而產生擾動，原來的區域留下正離子，如圖 3-5 所示。局部正負電荷的分離產生了靜電場 \vec{E} ，此電場施力於正負電荷。由於正離子的質量遠大於電子，電子受力後運動狀態的改變遠大於正離子，故正離子的運動可忽略不計，電子受靜電場 \vec{E} 之作用力後，向原來位置加速而獲得動能。這些電子因其慣性，穿過原來位置而進入左方的中性區，這時產生與原先方向相反的靜電場。於是這群電子又加速進入右方的中性區；若一切阻力(如電子與正離子的碰撞)不計，這種往復振盪運動永不休止。此現象稱為**電漿振盪(plasma oscillations)**。

假設電場為 x 方向，即 $\vec{E} = \hat{a}_x E$ ，單一電子受此電場的作用力，應用牛頓第二定律得以下關係

$$F_x = eE_x = m_e \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (3-34)$$

現用高斯定律計算此區域的靜電場 \vec{E} 。

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0} \quad (3-35)$$

取截面積為 A (在 yz 面)，長為 x 的六面體為高斯面 s ，如圖 3-5 所示(僅示二維部份)。

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = AE_x$$

$$\frac{q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{-eN_e Ax}{\epsilon_0}$$

式中 N_e 為單位體積之電子數，將以上二式代入(3-35)式得

$$AE_x = \frac{-eN_e Ax}{\epsilon_0} \rightarrow E_x = \frac{-eN_e x}{\epsilon_0}$$

將上式代入(3-35)式得以下之微分方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{N_e e^2}{m_e \epsilon_0} x = 0$$

令
$$\omega_p = \sqrt{\frac{N_e e^2}{m_e \epsilon_0}} \quad (3-36)$$

稱為振盪頻率(oscillation frequency)或電漿頻率(plasma frequency)，是為電漿的自然振盪頻率，上式可寫成

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_p^2 x = 0 \quad (3-37)$$

(3-37)式之解為

$$x = C_1 \sin(\omega_p t) + C_2 \cos(\omega_p t) \quad (3-38)$$

式中 C_1 與 C_2 為常數，可由起初狀態決定。(3-38)式是電漿層自由振盪的位移函數。

3.4. 電漿中傳播的電磁波(Electromagnetic Wave Propagation in a Plasma)

首先建立適用於電漿中的麥克斯韋方程。假設電漿僅由電子及正離子組成。正離子的質量遠大於電子，其運動方式遠較電子遲緩而可忽略不計。並假設其運動之位移與速度為時諧型態，其時間部份為 $e^{j\omega t}$ 之型式。

令 $\vec{J} = \text{Re}[\hat{J}e^{j\omega t}]$ 及 $\rho = \text{Re}[\hat{\rho}e^{j\omega t}]$ 分別為電流密度及電荷密度的時諧

型態。 \hat{J} 及 $\hat{\rho}$ 分別為電流密度及電荷密度的相量型態。一般有下列關係

$$\vec{J} = N_{total} e \vec{v} \quad \text{及} \quad \rho = N_{total} e \quad (3-39)$$

式中， N_{total} 為總電子密度

$$N_{total} = N_e + \text{Re}[\hat{n}_e e^{j\omega t}]$$

N_e 為穩定狀態的電子密度， \hat{n}_e 為移動電子密度的相量型態。

假設 \vec{v} 為電子(不包括穩定狀態的電子部份)速度的時諧型態，則

$$\vec{v} = \text{Re}[\hat{v}e^{j\omega t}]$$

式中 \hat{v} 為速度相量。將 N_{total} 及 \vec{v} 代入電流密度 \vec{J} 表示式，得

$$\begin{aligned} \vec{J} &= [N_e + \text{Re}(\hat{n}_e e^{j\omega t})] e [\text{Re}(\hat{v}e^{j\omega t})] \\ &= eN_e \text{Re}(\hat{v}e^{j\omega t}) + e [\text{Re}(\hat{n}_e e^{j\omega t})] [\text{Re}(\hat{v}e^{j\omega t})] \end{aligned}$$

再假設我們僅考慮少量的電子振盪，故 $|\hat{n}_e| \ll N_e$ 。因此上式等號右端第二項遠小於第一項，則

$$\vec{J} = \text{Re}[\hat{J}e^{j\omega t}] \cong eN_e \text{Re}(\hat{v}e^{j\omega t})$$

電流密度的相量型態為

$$\hat{\mathbf{J}} \cong N_e e \hat{\mathbf{v}} \quad (3-40)$$

上式即為移動電子的電流密度，亦即應用於麥克斯韋方程組中的電流密度。

(3-39)式中電荷密度式中穩態電子密度 N_e 被正離子密度抵銷，故

$$\begin{aligned} N_{\text{total}} &= N_e + \text{Re}[\hat{n}_e e^{j\omega t}] \cong \text{Re}[\hat{n}_e e^{j\omega t}] \\ \rho &= \text{Re}[\hat{\rho} e^{j\omega t}] = N_{\text{total}} e \cong e \text{Re}[\hat{n}_e e^{j\omega t}] \end{aligned}$$

故電荷密度的相量式為

$$\hat{\rho} \cong \hat{n}_e e \quad (3-41)$$

現在可以用相量型態寫出麥克斯韋方程組如下

$$\vec{\nabla} \times \hat{\mathbf{H}} = j\omega \epsilon_0 \hat{\mathbf{E}} + N_e e \hat{\mathbf{v}} \quad (3-42)$$

$$\vec{\nabla} \times \hat{\mathbf{E}} = -j\omega \mu_0 \hat{\mathbf{H}} \quad (3-43)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{E}} = \frac{\hat{\rho}}{\epsilon_0} \quad (3-44)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{H}} = 0 \quad (3-45)$$

及連續方程 $\vec{\nabla} \cdot (N_e e \hat{\mathbf{v}}) = -j\omega \hat{\rho} \quad \left[\vec{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{J}} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \right]$

$$\vec{\nabla} \cdot (N_e \hat{\mathbf{v}}) = -j\omega \hat{n}_e \quad (3-46)$$

電場作用於電子的動力方程的相量型態為

$$e \hat{\mathbf{E}} = j\omega m_e \hat{\mathbf{v}} \quad (3-47)$$

將(3-47)式與(3-42)式消去 $\hat{\mathbf{v}}$ ，得

$$\vec{\nabla} \times \hat{\mathbf{H}} = j\omega \epsilon_0 \left(1 - \frac{N_e e^2}{\omega^2 m_e \epsilon_0} \right) \hat{\mathbf{E}} = j\omega \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \hat{\mathbf{E}}$$

式中 $\omega_p = \sqrt{\frac{N_e e^2}{m_e \epsilon_0}}$ 為電漿頻率。

令 $\epsilon_{\text{eff}} = \epsilon_p = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)$

則 $\vec{\nabla} \times \hat{\mathbf{H}} = j\omega \epsilon_{\text{eff}} \hat{\mathbf{E}} \quad (3-48)$

由(3-46)，(3-44)及(3-47)式可得

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon_{\text{eff}} \hat{\mathbf{E}}) = 0 \quad (3-49)$$

由(3-48)，(3-43)，(3-49)，及(3-45)式可得以下之微分方程

$$\frac{d^2 E_x}{dt^2} + \omega^2 \mu_0 \epsilon_{\text{eff}} E_x = 0 \quad (3-50)$$

令 $\beta = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_{\text{eff}}} = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)}$ ，並令 $X = \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ ，(3-50)式之解為

$$\hat{E}_x(z) = C_1 e^{-j\beta z} + C_2 e^{j\beta z}$$

$$= C_1 e^{-j\omega z \sqrt{\mu\epsilon_0(1-X)}} + C_2 e^{j\omega z \sqrt{\mu\epsilon_0(1-X)}}$$

其相關的磁場為

$$\hat{H}_y(z) = \frac{C_1}{\eta_p} e^{-j\omega z \sqrt{\mu\epsilon_0(1-X)}} + \frac{C_2}{\eta_p} e^{j\omega z \sqrt{\mu\epsilon_0(1-X)}}$$

式中

$$\eta_p = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_{eff}}} = \frac{\sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}}{\sqrt{1 - \omega_p^2 / \omega^2}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{1 - \omega_p^2 / \omega^2}}$$

為電漿的固有阻抗。

電漿頻率 f_p 為

$$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}} \quad (\text{Hz}) \quad (3-51)$$

電離層或電漿的等效電容率為

$$\epsilon_{eff} = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) = \epsilon_0 \left(1 - \frac{f_p^2}{f^2}\right) \quad (\text{F/m}) \quad (3-52)$$

電磁波在電離層中的傳播常數為

$$\hat{\gamma} = j\omega \sqrt{\mu\epsilon_p} = j\omega \sqrt{\mu\epsilon_0} \sqrt{1 - \frac{f_p^2}{f^2}} \quad (\text{rad/m}) \quad (3-53)$$

固有波阻抗為

$$\eta_p = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_p}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{1 - \frac{f_p^2}{f^2}}} \quad (\Omega) \quad (3-54)$$

當 $f < f_p$ 時, $\hat{\gamma}$ 成爲純實數, 電磁波因衰減因素而不能傳播。同時固有波阻抗 η_p 爲純虛數, 電漿成爲阻抗負載(reactive load), 而不傳遞功率。因此 f_p 又稱爲**截止頻率(cutoff frequency)**。

當 $f > f_p$ 時, $\hat{\gamma}$ 成爲純虛數, 電磁波在電漿內得以傳播而不會衰減(假設無碰撞的耗損)。

若將 $e = 1.6 \times 10^{-19} (\text{C})$, $m = 9.11 \times 10^{-31} (\text{kg})$, $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} (\text{F/m})$ 代入(3-51)可得到截止頻率 f_p 的簡單關係式:

$$f_p \cong 9\sqrt{N} \quad (\text{Hz}) \quad (3-55)$$

式中單位體積電子數量 N 並非常數, 而是與高度, 日夜, 季節以及其他因素有關。電離層的電子數約爲 $10^{10} \sim 10^{12} (\text{m}^{-3})$ 。將此值代入(3-38)得

$$0.9(\text{MHz}) \leq f_p \leq 9(\text{MHz})$$

因此當用電磁波與大氣層上方的人造衛星及太空站通訊時, 頻率須遠大於 9(MHz), 以確保電磁波能穿越單位體積電子數量 N 有最大值的區域。

若電磁波頻率小於 0.9(MHz) 時, 連電離層的最低層都穿不過, 但可以在地面與電離層間的空間作往復反射式的傳播。

若電磁波頻率介於 0.9(MHz) 與 9(MHz) 之間, 則有部份會穿過電離層的較低層, 但碰到 N 值很大的區域時, 會往後折回。

例 3-6. 當太空船返回大氣層時，因船體外殼與空氣高速摩擦的高溫，使局部空氣離子化而產生電漿。據估計電子密度約為 $2 \times 10^8 (\text{cm}^{-3})$ ，若要與太空人通訊，電磁波的頻率最低值應為若干？

【解】

$$N = 2 \times 10^8 (\text{cm}^{-3}) = 2 \times 10^{14} (\text{m}^{-3})$$

代入(3-38)式得

$$f_p = 9 \times \sqrt{2 \times 10^{14}} = 12.7 \times 10^7 (\text{Hz}) = 127 (\text{MHz})$$

故通訊頻率不得低於 127(MHz)。

3.5. 群速(Group Velocity)

在無耗損介質中，平面電磁波的傳播常數 β 與 ω 的關係為

$$\beta = \omega \sqrt{\mu\epsilon} \quad (\text{rad/m})$$

相速為

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (\text{m/s})$$

β 與 ω 為線性關係，而 v_p 與頻率無關。

但在某些情況下，如電磁波在耗損介質中傳播，或在傳輸線及波導中傳播時，相速為 ω 的線性函數，即具有不同頻率的波會以不同的相速傳播。由於傳載資訊的電磁波不是單一頻率，而是由一群具有各種不同頻率的成份波組成的合成波。各種成份波因頻率不同而有不同的傳播速度，於傳播一段距離時，使得訊號的形狀產生失真(distortion)，各成份波因而分散(disperses)，這種現象稱為色散(dispersion)。因此耗損介質是一種色散介質(dispersive medium)。

承載資訊的波通常是由一個高頻的承載波，與位於其兩側頻率差異很小的一群成份波所組成。這一群的波形成波包(wave packet)，此波包的傳播速度稱為群速(group velocity)。

現在考慮一種最簡單的波包，僅含兩個行進波，其振幅相同但頻率略有不同，一個為 $\omega_0 + \Delta\omega$ ，另一個為 $\omega_0 - \Delta\omega$ ($\Delta\omega \ll \omega_0$)。二波的相常數為頻率的函數，也稍許不同，令相對二頻率之相常數為 $\beta_0 + \Delta\beta$ 及 $\beta_0 - \Delta\beta$ 。此二波之合成波為

$$\begin{aligned} E(z, t) &= E_0 \cos[(\omega_0 + \Delta\omega)t - (\beta_0 + \Delta\beta)z] \\ &\quad + E_0 \cos[(\omega_0 - \Delta\omega)t - (\beta_0 - \Delta\beta)z] \\ &= 2E_0 \cos(t\Delta\omega - z\Delta\beta) \cos(\omega_0 t - \beta_0 z) \end{aligned}$$

上式顯示合成波為行進波，其振幅並非常數，而是以 $\Delta\omega$ 之角頻率做緩慢變化如圖 3-6 所示。

包含在波包內的波，其相速 v_p 可由相角 $\omega_0 t - \beta_0 z = \text{常數}$ 計算而得

$$v_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega_0}{\beta_0}$$

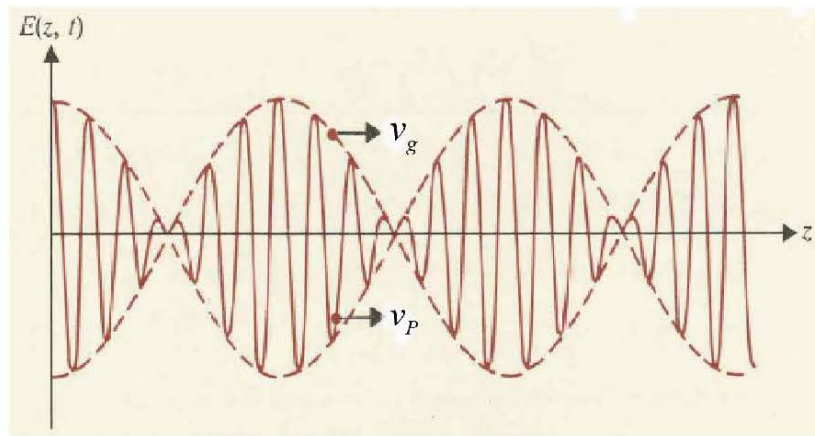


圖 3-6

波包本身的行進速度 v_g 稱為**群速(group velocity)**，可由下式計算而得

$$t\Delta\omega - z\Delta\beta = \text{常數}$$

$$v_g = \frac{dz}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta} = \frac{1}{\Delta\beta/\Delta\omega}$$

取 $\Delta\omega \rightarrow 0$ 的極限值，可得色散介質中的群速

$$v_g = \frac{1}{d\beta/d\omega} \quad (\text{m/s}) \quad (3-56)$$

v_g 被認定為**窄帶信號(narrow-band signal)**的速度，不適用於色散介質中的寬頻訊號。

例 3-6. 一個窄帶信號在耗損介質中傳播。在此信號的波載頻率 550(kHz)下，此介質之耗損角正切為 0.2。而介電常數為 2.5。求(a) 衰減常數 α 及相常數 β 。(b) 相速 v_p 及群速 v_g 。此介質是色散性嗎？

【解】(a) $\because \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = 0.2$ 及 $\frac{1}{8}(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'})^2 \ll 1, \therefore$ 此介質可視為低耗損介電質， α 及 β 值可用(3-31)及(3-32)二近似式表示。

$$\alpha \cong \frac{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{2} \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right) = \frac{\omega\varepsilon''}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}} \quad (3-31)$$

$$\varepsilon'' = 0.2\varepsilon' = 0.2\varepsilon_0\varepsilon_r$$

$$= 0.2(2.5)(8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}) = 4.42 \times 10^{-12} \text{ (F/m)}$$

代入(3-31)式得

$$\alpha \cong \frac{2\pi f\varepsilon''}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}}$$

$$= \pi(550 \times 10^3 \text{ Hz})(4.42 \times 10^{-12} \text{ F/m}) \frac{377\Omega}{\sqrt{2.5}} = 1.82 \times 10^3 \text{ (Np/m)}$$

由(3-32)式

$$\beta \cong \omega\sqrt{\mu\varepsilon'} \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^2 \right]$$

$$= 2\pi(550 \times 10^3 \text{ Hz}) \frac{\sqrt{2.5}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} \left[1 + \frac{1}{8}(0.2)^2 \right] = 0.0183 \text{ (rad/m)}$$

(b) 相速

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon'} \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'} \right)^2 \right]} \cong \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon'}} \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'} \right)^2 \right]$$

$$= \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{\sqrt{2.5}} \left[1 - \frac{1}{8}(0.2)^2 \right] = 1.888 \times 10^8 \text{ (m/s)}$$

(c) 由(3-32)式

$$\frac{d\beta}{d\omega} = \sqrt{\mu\epsilon'} \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'} \right)^2 \right]$$

得群速

$$v_g = \frac{1}{(d\beta/d\omega)} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon'} \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'} \right)^2 \right]} \cong \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon'}} \cong v_p$$

由以上結果得知低耗損介電質近乎非色散介質。
茲將電磁波的頻譜列於次頁之圖 3-7。

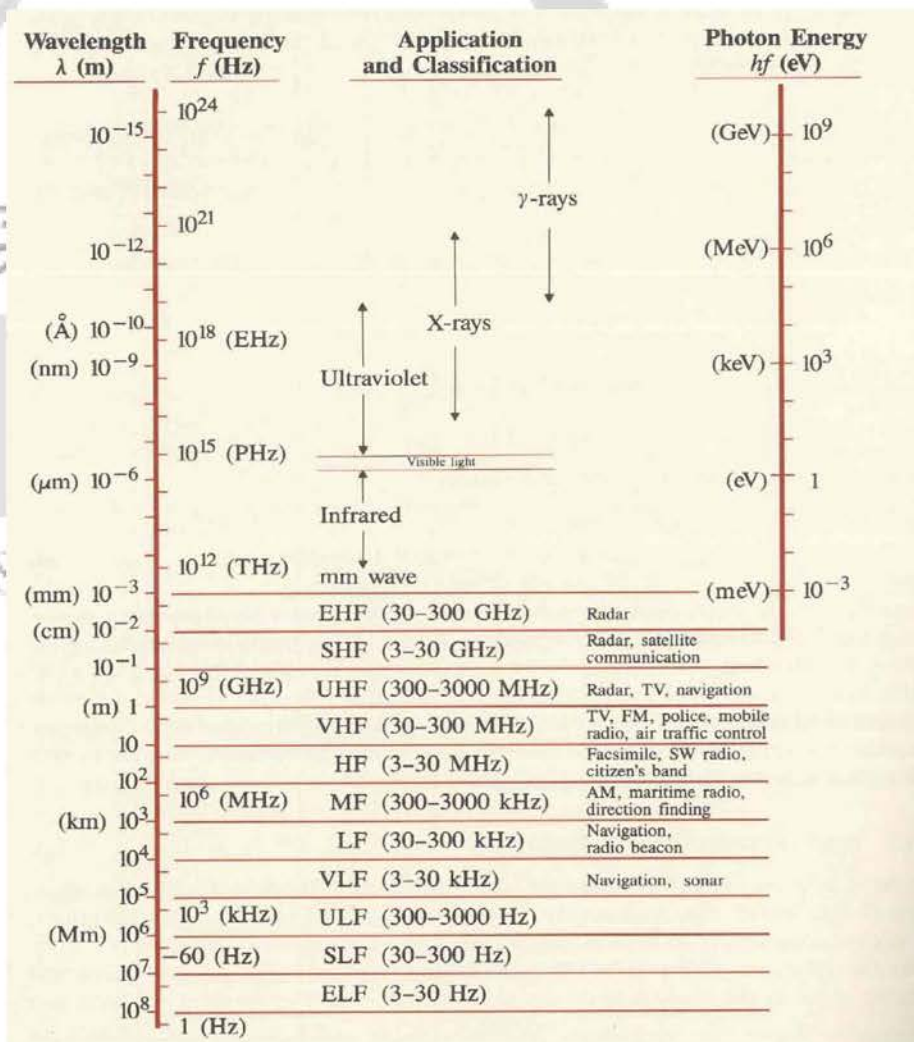


圖 3-7 電磁波的頻譜