開放式課程網路教材

普通物理（下）

General Physics (II)

國立中山大學物理系 周啟教授 編著

第一章　庫倫定律與電場

Coulomb's Law and Electric Field

1-1. 緒言(introduction)

西元前 600 年, 希臘人即知琥珀用羊毛摩擦後, 能吸引輕物, 此現象稱為琥珀起電. 琥珀此時帶有電荷, 或簡稱帶電.

電子(Electron)之名稱起源於希臘字 elektron, 其原意即為琥珀. 電量的單位為庫倫(coulomb, 簡寫為 C). 一個電子帶有 -1.60219×10^{-19} 庫倫的電量, 一個質子帶 $+1.60219\times10^{-19}$ 庫倫的電量, 令

$$e = 1.60219\times10^{-19}\ \mathrm{C} \cong 1.60\times10^{-19}\ \mathrm{C}$$

e 稱為**基本電荷(elementary charge)**, 為帶電體的最小額帶電量, 是羅伯特-密立根與哈維-福萊柴爾於 1906 年在油滴實驗中發現.

電荷有正電荷與負電荷兩種: 玻璃棒用絲絹摩擦後, 帶正電荷; 硬橡皮棒用毛皮摩擦後, 帶負電荷. 同種電荷會互相排斥, 異種電荷會互相吸引.

電荷有**電荷量子化(Charge is quantized)與電荷守恆(charge conservation)**等性質. **電荷量子化是指任何帶電體所帶之電量 q, 必為基本電荷 e 的整數倍,** 即

$$q = ne, \quad n = \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \cdots,$$

一個隔離系統內的總電量保持定值, 若增加(或減少)一個 $+q$, 則必同時增加(或減少)一個 $-q$, 這種現象稱為電荷守恆.

1-2. 庫倫定律(Coulomb's Law)

庫倫用實驗方法測得, 相距 r 遠之二點電荷 Q_1 及 Q_2(見圖 1-1)間, 其相互之作用力 $\vec{F}$ 可用下式表示

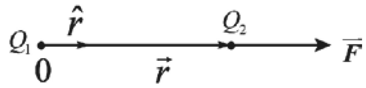


圖 1-1

$$\vec{F} = k\frac{Q_1Q_2}{r^2}\hat{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q_1Q_2}{r^2}\hat{r} \qquad (1\text{-}1)$$

應用(1-1)式之庫倫定律時，應注意下列事項:

(1) 此式僅適用於 Q_1 及 Q_2 皆為**點電荷(point charge)的情況. 若帶電體具有形狀而有體積時，須用積分計算庫倫力.**

(2) 式中各量的單位: 電量 Q 為(C)，距離 r 為(m)，力 F 為(N).

(3) 常數 $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cong 9\times10^9\ (\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}})$

k **稱為靜電常數(electrostatic constant)**

$\varepsilon_o = 8.85\times10^{-12}\ (\mathrm{F\cdot m^{-1}})$ 稱為**電容率常數(permittivity constant)**

(4) Q_1 與 Q_2 若為同種電荷，則 $\vec{F}$ 為排斥力(repulsive force)

Q_1 與 Q_2 若為異種電荷，則 $\vec{F}$ 為吸引力(attractive force)

(5) 力 $\vec{F}$ 的大小與 Q_1 及 Q_2 二電量之乘積成正比，與距離的平方 r^2 成反比

(6) 力 $\vec{F}$ 稱為**靜電力(electrostatic force)**，又稱為**庫倫力(Coulomb's force)**，靜電力屬連心力(central force)，又屬超距力(force act at a distance).

例1-1. 一個 α 粒子的質量與電荷分別為, m = 6.68 x 10^{-27} kg 及 $q = +2e$ 或 q = 3.2 × 10^{-19} C. 相距 r 遠的兩個 α 粒子間，靜電力與萬有引力之比值為何?

【解】兩個 α 粒子間之庫倫力為 $F_e = k(\dfrac{q^2}{r^2})$

兩個 α 粒子間之萬有引力為 $F_G = G(\dfrac{m^2}{r^2})$

庫倫力與萬有引力之比為

$$\frac{F_e}{F_G} = (\frac{k}{G})(\frac{4e^2}{m^2}) = (\frac{8.98755\times10^9\,\mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}}{6.670\times10^{-11}\,\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}})(\frac{2\times1.6\times10^{-19}\,\mathrm{C}}{6.68\times10^{-27}\,\mathrm{kg}})^2 = 3.1\times10^{35}$$

由此可知萬有引力比起靜電力，其量小得微不足道

例 1-2. 圖 1-2 中，兩個一模一樣的電荷 q = 2.0 × 10^{-6} C，與第三個電荷

$Q = 4.0 \times 10^{-6}$ C 交互作用，求作用於第三個電荷 Q 上的總力.

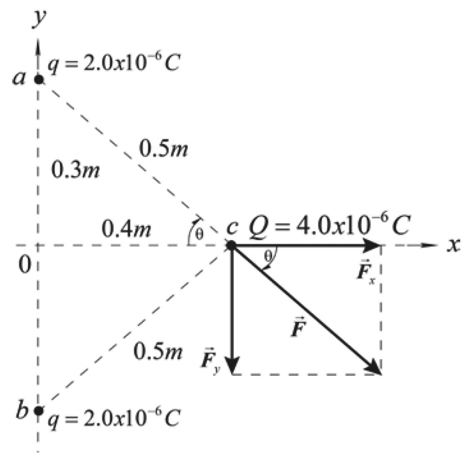


圖 1-2

【解】 在 a 及 b 二處的點電荷 q，分別對位於 c 處的點電荷 Q 產生的靜電力 F 之大小為:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{qQ}{r^2}$$

$$= (9\times10^9\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}})\frac{(2.0\times10^{-6}\ \mathrm{C})(4.0\cdot10^{-6}\mathrm{C})}{(0.5\ \mathrm{m})^2} = 0.29\ \mathrm{N}$$

在 a 點之電荷 q 對電荷 Q 之作用力，其 x 與 y 分量 F_x 與 F_y 分別為:

$$F_x = F\cos\theta = (0.29\ \mathrm{N})(\frac{0.4\ \mathrm{m}}{0.5\ \mathrm{m}}) = 0.23\ \mathrm{N}$$

$$F_y = -F\sin\theta = -(0.29\ \mathrm{N})(\frac{0.3\ \mathrm{m}}{0.5\ \mathrm{m}}) = -0.23\ \mathrm{N}$$

在 b 點之電荷 q 對電荷 Q 之作用力，其 x 與 y 分量 F_x 與 F_y 分別為:

$$F_x = F\cos\theta = (0.29\ \mathrm{N})(\frac{0.4\ \mathrm{m}}{0.5\ \mathrm{m}}) = 0.23\ \mathrm{N}$$

$$F_y = F\sin\theta = (0.29\ \mathrm{N})(\frac{0.3\ \mathrm{m}}{0.5\ \mathrm{m}}) = 0.23\ \mathrm{N}$$

電荷 C 所受總力的 x 與 y 分量 F_{Qx} 與 F_{Qy} 分別為

$$F_{Qx} = 2F_x = 2(0.23\ \mathrm{N}) = 0.46\ \mathrm{N}$$

$$F_{Qy}=0$$

1-3. 電場(Electric Field)

由於庫倫定律僅適用於點電荷, 在實際狀況下應用時很麻煩, 因此很少直接應用庫倫定律計算二帶電物體間的靜電力. 以下將介紹一種**電場**的新觀念, 用這個觀念可以計算帶電體間的靜電力, 帶電系統的能量等等. 電場可分為**靜電場**與**非靜電場**兩類. **靜電場是由靜電荷堆積於空間某些固定位置而產生的電場; 而非靜電場不是由電荷的堆積而產生的電場**, 例如磁場隨時間改變時在空間產生的電場. 首先將介紹靜電場.

「場」這個字的意義是指具有某些特性的空間, 例如停車場是一個空間具有可停車的特性; 籃球場是一個空間具有可作籃球運動的特性等等. 靜電場是指在靜電荷堆積的空間具一種特性: 此特性就是任何帶電體位於此空間內會受到靜電力. 例如圖 1-3 中一個帶有電荷 q 之物體, 若分別置於某空間之 P_1, P_2, P_3 三個位置時, 會分別受到 $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ 之靜電力時, 則稱該空間有**電場**分佈.

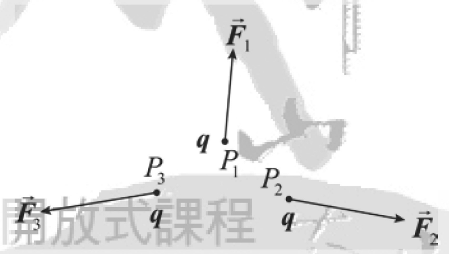


圖 1-3

為了將這種特性量化, 我們作以下的定義: **單位正電荷在空間某一位置所受到的靜電力稱為該位置的靜電場**. 例如, 將一個點電荷 q 置於位置 P 所受的靜電力為 $\vec{F}$ (見圖 1-4)時, 則該位置的靜電場 $\vec{E}$ 可表示為:

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q},\ (\mathrm{N}\cdot\mathrm{C}^{-1})$$

圖 1-4

在上式中用以量測電場之電荷 q 稱為檢驗點電荷, 原則上檢驗點電荷之電量 q 越小越好. 因為檢驗點電荷 q 置於某位置時, 往往會使原先產生電場之帶電體上的電荷, 受檢驗點電荷 q 的靜電力影響而重新分佈, 使得所測出的電場並非是原來要測的電場. 檢驗點電荷越小, 其影響就越小. 故電場較精

確的定義應寫為:

$$\vec{E} = \lim_{q \to 0} \frac{\vec{F}}{q}, \quad (\mathrm{N} \cdot \mathrm{C}^{-1})$$

在以下幾節中, 將介紹幾種靜電場的計算方法:

1-4. 點電荷的電場

固定於空間某一位置的點電荷 q, 會在其四周建立電場. 例如置於原點 O 的點電荷 q 會在任意位置 $\vec{r}$ 處之 P 點產生的電場. 此電場可由以下方法求得: (見圖 1-5),

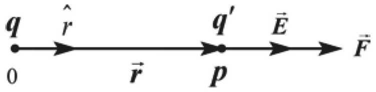


圖 1-5

先置另一個點電荷 q'於 P 點, 由庫倫定律可得 q'所受的靜電力 $\vec{F}$ 為:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{qq'}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \qquad (1\text{-}2)$$

由電場的定義的得知, P 點的電場為

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q'} \qquad (1\text{-}3)$$

將(1-2)式代入(1-3)式得

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \qquad (1\text{-}4)$$

(1-4)式即為**點電荷 q 在任意位置產生的電場**. 注意: **此式僅適用於 q 為點電荷.**

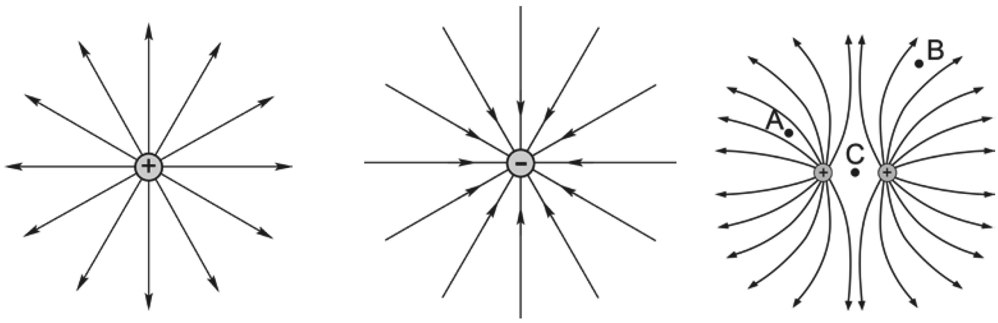
電場在空間的分佈情況本來是無法用眼睛看到的抽象概念. 科學家法拉第用一種較具體之概念稱為**電力線(lines of force)**以表示空間電場的分佈. 茲將此概念描述於下:

在有電場分佈的空間, 可繪出一組曲線, 在曲線上的任意一點, 其切線方向就是該點的電場方向. 依此規則繪出的一組曲線, 稱為**電力線.** 圖 1-6 為數種電力線的分佈情況. 電力線有以下特性:

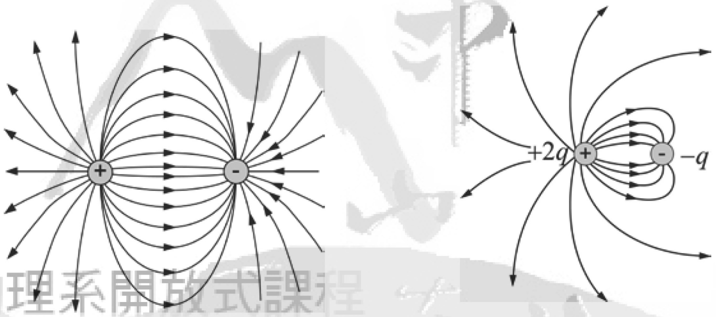
(1) 電力線從正電荷發出而止於負電荷.

(2) 任意兩條電力線不會相交.

(3) 電力線較密集之處，電場較大，電力線較稀疏之處，電場較小.



(a) (b) (c)



(d) (e)

相距 d 遠之兩個帶電體，分別帶$+q$ 與 $-q$ 之電荷，如圖 1-7 所示，這樣的結構稱為**電偶極(Electric Dipole).** 令 $\vec{d}$ 為長度向量，其方向是從 $-q$ 指向 $+q$，則定義 $\vec{p}=q\vec{d}$ (Cm) 稱為**電偶極矩(electric dipole moment).**

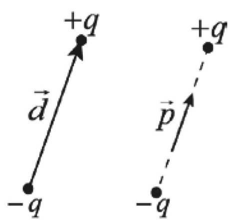


圖 1-7

例 1-3. 試求圖 1-8 中電偶極在均勻電場 $\vec{E}$ 中所受之力與力矩.

【解】 在均勻電場 $\vec{E}$ 分佈的空間, $+q$ 所受之力為 $\vec{F}_{+}=+q\vec{E}$, -q 所受之力為 $\vec{F}_{-}=-q\vec{E}$

電偶極所受的總力為 $\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = 0$

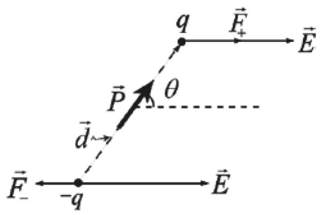


圖 1-8

由於 $\vec{F}_+$ 與 $\vec{F}_-$ 之大小相等方向相反行成一對力偶, 故**在均勻電場中，電偶極所受的力矩(torque)為**

$$\vec{\tau} = \vec{d} \times q\vec{E} = q\vec{d} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E} \qquad (1\text{-}5)$$

電偶極受此力矩之作用會繞質心旋轉, 直到電偶矩 $\vec{p}$ 與電場 $\vec{E}$ 保持同方向為止, 如圖 1- 9a 所示.

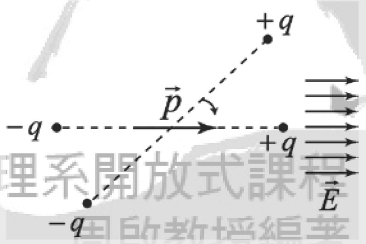


圖 1-9a

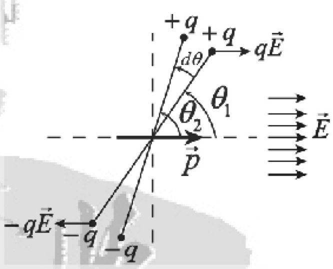


圖 1-9b

若用外力矩 $\vec{\tau}_{ext}$ 將電偶極從位置 θ_1 轉到 θ_2 (見圖 1-9b), 則在此過程中均勻電場對電偶極所施的力矩 $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$ 所做之功 W_τ 為

$$W_\tau = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \vec{\tau} \cdot d\vec{\theta} = -\int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau d\theta$$

$$= -\int_{\theta_1}^{\theta_2} pE \sin\theta d\theta = pE(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$$

從以上結果得知, W_τ 僅與起初及末後之角位置有關, 故 W_τ 可化成位能差的型態. 即

$$W_\tau = pE(\cos\theta_2 - \cos\theta_1) = -(E_{p,2} - E_{p,1})$$

令 $\theta_2 = 90^o$ 處, 位能 $E_{p,2} = 0$； $\theta_1 = \theta$ 處, 位能 $E_{p,1} = E_p$， 可得

$$E_p = -pE\cos\theta = -\vec{p}\cdot\vec{E} \tag{1-6}$$

(1-6)式為**電偶極在均勻電場中的位能**

1-5. 一群點電荷的電場

一群點電荷 q_1, q_2, q_3,…..等, 置於空間某些固定之位置, 如圖 1-10 所示, 這些電荷在 P 點產生的總電場, 可依以下步驟計算而得:

首先計算這些點電荷各自在 P 點產生的電場, 如

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{F}_1}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_1}{r_1^2}\hat{r}_1$$

$$\vec{E}_2 = \frac{\vec{F}_2}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_2}{r_2^2}\hat{r}_2$$

$$\vec{E}_3 = \frac{\vec{F}_3}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_3}{r_3^2}\hat{r}_3$$

……………………

式中 q 為位於 P 點之檢驗電荷.

再應用力有疊加性的性質, $\sum\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots$, 計算 p 點的總電場 $\vec{E}$ 為

$$\vec{E} = \frac{\sum\vec{F}}{q} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots}{q} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \cdots$$

故一群 N 個點電荷所產生的總電場為

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r_i^2}\,\hat{\mathrm{r}}_i \tag{1-7}$$

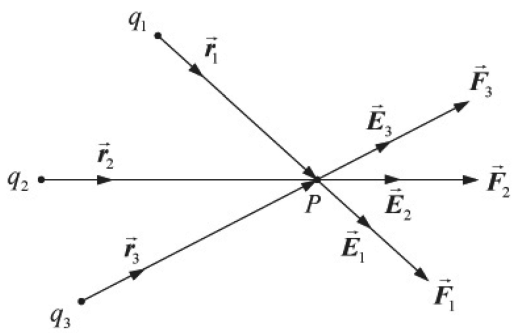


圖 1-10

例 1-4. 二點電荷，$q_1 = 12\times10^{-9}$ C，及 $q_2 = -12\times10^{-9}$ C，相距 0.1 m，如圖 1-11 所示. 試計算此二點電荷於 a, b, 及 c 點所建立的電場.

【解】取二維座標如圖 1-11 所示.

應用(1-6)式 $$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r_i^2}\,\hat{r}_i$$

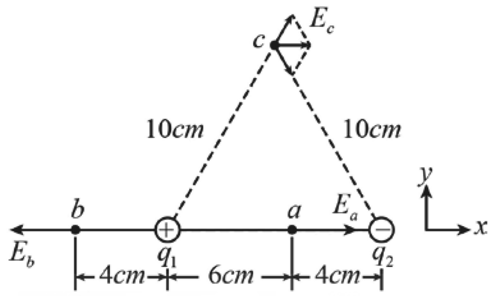


圖 1-11

a 點的電場為

$$\vec{E}_a = \hat{x}\left[\left|\vec{E}_{1a}\right| + \left|\vec{E}_{2a}\right|\right] = \hat{x}\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{|q_1|}{r_{1a}^2} + \frac{|q_2|}{r_{2a}^2}\right]$$

$$= \hat{x}(9\times10^9\ \mathrm{N\cdot m^2}/C^2)\left[\frac{12\times10^{-9}\ \mathrm{C}}{(0.06\ \mathrm{m})^2} + \frac{12\times10^{-9}\ \mathrm{C}}{(0.04\ \mathrm{m})^2}\right]$$

$$= \hat{x}9.75\times10^4\ \mathrm{N/C}$$

b 點的電場為

$$\vec{E}_b = -\hat{x}\left|\vec{E}_{1b}\right| + \hat{x}\left|\vec{E}_{2b}\right| = \hat{x}\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[-\frac{|q_1|}{r_{1b}^2} + \frac{|q_2|}{r_{2b}^2}\right]$$

$$= \hat{x}(9\times10^9\ \mathrm{N\cdot m^2}/C^2)\left[-\frac{12\times10^{-9}\ \mathrm{C}}{(0.04\ \mathrm{m})^2} + \frac{12\times10^{-9}\ \mathrm{C}}{(0.14\ \mathrm{m})^2}\right]$$

$$= -\hat{x}6.20\times10^4\ \mathrm{N/C}$$

c 點的電場為

$$\left|\vec{E}_{1c}\right| = \left|\vec{E}_{2c}\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{|q_1|}{r_{1c}^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{|q_2|}{r_{2c}^2}$$

$$\vec{E}_c = \left|\vec{E}_{1c}\right|(\hat{x}\cos 60^o + \hat{y}\sin 30^o) + \left|\vec{E}_{1c}\right|(\hat{x}\cos 60^o - \hat{y}\sin 30^o)$$

$$= \hat{x}2\left|\vec{E}_{1c}\right|\cos 60^o$$

$$= \hat{x}2(9\times10^9\ \mathrm{N\cdot m^2}/C^2)\left[\frac{12\times10^{-9}\ \mathrm{C}}{(0.10\ \mathrm{m})^2}\right](\cos 60^o)$$

$$= \hat{x}1.08\times10^4\ \mathrm{N/C}$$

1-6. 連續分佈電荷的電場

圖 1-12 中, 連續分佈於體積為 τ 範圍內的電荷, 密度為 ρ C/m^3(與位置有關), 在空間任意一點產生的電場, 可依以下步驟求得.

將體積為 τ 的範圍, 分割成無限多個小體積基素(volume element), 取其中一個體積基素 $\Delta\tau$, 乘上該位置的電荷密度 ρ, 便為位於該處的電荷基素(charge element) $\Delta q = \rho\Delta\tau$. 由於 Δq 的體積 $\Delta\tau$ 很小, 可視為點電荷, 此一點電荷在 P 點產生的電場基素為

$$\Delta\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\Delta q}{r^2}\hat{r}$$

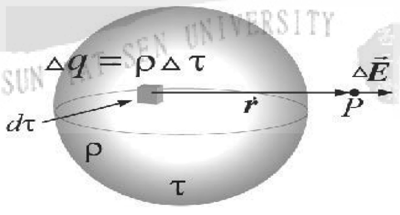


圖 1-12

若體積基素 $\Delta\tau_i$ 及電荷基素 Δq_i 趨於無限小, 則

$$d\vec{E} = \lim_{\Delta q\to 0}\Delta\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\lim_{\Delta q\to 0}(\frac{\Delta q}{r^2}\hat{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dq}{r^2}\hat{r}$$

其他的電荷基素也都會在 P 點產生各自的電場基素(electric field element). 根據重疊原理, 可得 P 點的總電場為

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int\frac{dq}{r^2}\hat{r} \qquad (1\text{-}8)$$

式中 $dq = \rho d\tau$， $\rho = \dfrac{dq}{d\tau}$ (Cm^{-3}) 為體積電荷密度.

若電荷連續分佈於體積 τ 的表面 s (見圖 1-13), 或分佈於長度為 l 的線上(見圖 1-14), 則在空間任意一點產生的電場, 仍可依以上步驟求得電場.

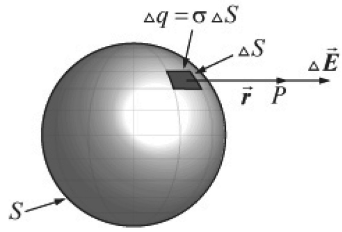


圖 1-13

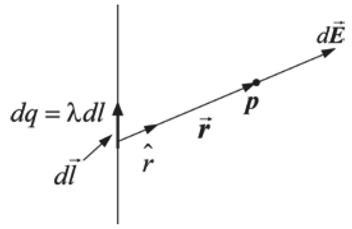


圖 1-14

在此狀況下, P 點的電場仍為(1-8)式, 但式中電荷基素 dq 分別為:

$$dq = \sigma ds \qquad \sigma = \frac{dq}{ds}\ (Cm^{-2}), \quad ds \text{ 為面積基素}(\text{area element})$$

$$dq = \lambda d\ell \qquad \lambda = \frac{dq}{d\ell}\ (Cm^{-1}), \quad d\ell \text{ 為線基素(line element)}$$

值得注意的是, 在計算電場時, 不宜直接應用 $\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\displaystyle\int \frac{dq}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$ 式, 因為積分號內有向量. 通常積分只能積純量, 若積分號內有向量, 除非向量的方向是固定的, 例如, 單位向量 $\hat{\mathbf{r}}$ 之方向不因 dq 的位置而改變, 則積分時可把 $\hat{\mathbf{r}}$ 提出積分號外, 積分號內只剩下純量便可積分. 否則要先把向量分成某些有固定方向的分量後再積分. 因此在應用(1-8)式之前, 要先處理下式

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dq}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

今就以下幾個例題作示範說明.

例 1-5. 線密度為 λ Cm^{-1} 之電荷均匀分佈於無限長直線上, 試求與直線垂直距離為 R 的 P 點之電場.

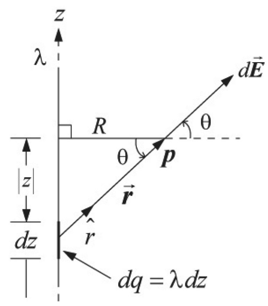
【解】 由 $$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dq}{r^2}\hat{r}$$

取電荷基素 $dq = \lambda dz$ (見圖 1-15), dq 沿 z-軸變換位置時, $d\vec{E}$ 的方向 $\hat{r}$ 也隨著改變. 故將 $d\vec{E}$ 分成互相垂直之二分量, z-分量與 R-分

量,

即 $d\vec{E} = \hat{R}dE_R + \hat{z}dE_z$

$$= \hat{R}\cos\theta dE + \hat{z}\sin\theta dE$$



$$\vec{E}_R = \hat{R}\int dE_R = \hat{R}\int\cos\theta dE = \hat{R}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\theta dz}{r^2}$$

圖 1-15

另一注意事項: 一重積分只能對只有單一變數的量積分, 若積分號內有多個變數, 則須將這些變數化成同一變數之後才能積分.

今積分號內有 z, r, 及 θ 三個變數, 故須將此三個變數化成同一個變數. 先找出 z, r,與 θ 之關係如下, 並得知 z 與 r 可化為 θ 之函數.

$$r = R\sec\theta \qquad |z| = -z = R\tan\theta$$

$$dz = -R\sec^2\theta d\theta$$

將 r 及 dz 值代入積分號內

$$\vec{E}_R = \hat{R}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\int_{\pi/2}^{-\pi/2}\frac{\cos\theta(-R\sec^2\theta d\theta)}{(R\sec\theta)^2} = \hat{R}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o R}\int_{\pi/2}^{-\pi/2}(-\cos\theta)d\theta$$

$$= -\hat{R}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o R}\left[\sin(-\frac{\pi}{2}) - \sin(\frac{\pi}{2})\right] = \hat{R}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o R}$$

同理可得

$$\vec{E}_z = \hat{z}\int dE_z = \hat{z}\int\sin\theta dE = \hat{z}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\theta dz}{r^2}$$

$$= \hat{z}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o R}\left[\cos(-\frac{\pi}{2}) - \cos(\frac{\pi}{2})\right] = 0$$

$$\therefore \qquad \vec{E} = \hat{R}E_R + \hat{z}E_z = \hat{R}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o R} \qquad (1\text{-}9)$$

實際上, 上述等於零的 $\vec{E}_z$ 分量不必計算, 可藉對稱原則, 判斷原點以下的電荷與原點以上相對應的電荷, 分別在 P 點產生電場的 z 分量, 大小相等而方向相反, 故全部電荷在 P 點產生電場的 z 分量為零.

例 1-6. 電荷 Q, 均勻分佈於半徑為 R 的圓周上, 試求在通過圓心且與圓面垂直的軸上, 距圓心 z 遠處一點 P 的電場. (見圖 1-16)

【解】
$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dq}{r^2}\hat{r}$$

在圓周上方取一電荷基素 dq

$$dq = \lambda d\ell = \frac{Q}{2\pi R}d\ell$$

$$d\vec{E} = \hat{a}_r \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o r^2}d\ell \qquad \text{方向如圖所示}$$

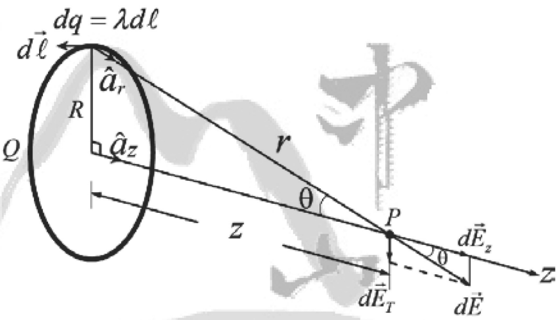


圖 1-16

由於 $d\vec{E}$ 之方向 $\hat{a}_r$ 會隨 dq 位置的改變而改變, 故 $d\vec{E}$ 不能積分. 現將 $d\vec{E}$ 分成與 z-軸平行及垂直的二分量 $d\vec{E}_z$與$d\vec{E}_T$

即 $$d\vec{E} = \hat{a}_T dE_T + \hat{a}_z dE_z \qquad (\hat{a}_T \text{ 為垂直 z-軸的橫向單位向量})$$

$$\vec{E} = \hat{a}_T \oint dE_T + \hat{a}_z \oint dE_z$$

由電荷的對稱分佈得知, $\oint dE_T = 0$

$$\vec{E} = \hat{a}_z \oint dE_z = \hat{a}_z \oint \cos\theta dE = \hat{a}_z \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_o}\oint \frac{\cos\theta}{r^2}d\ell$$

$$= \hat{a}_z \frac{\lambda\cos\theta}{4\pi\varepsilon_o r^2}\oint d\ell = \hat{a}_z \frac{\lambda(z/\sqrt{R^2+z^2})}{4\pi\varepsilon_o (R^2+z^2)}(2\pi R)$$

$$= \hat{a}_z \frac{Qz}{4\pi\varepsilon_o (R^2+z^2)^{3/2}} \tag{1-10}$$

例1-7. 電荷分佈於一個半徑為 a 的圓形平面, 密度為 σ (C/m^2), 試求在通過圓心與圓面垂直的軸上, 距圓心 z 遠處 P 點之電場. 見圖 1-17.

【解】 $$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dq}{r^2}\hat{a}_r$$

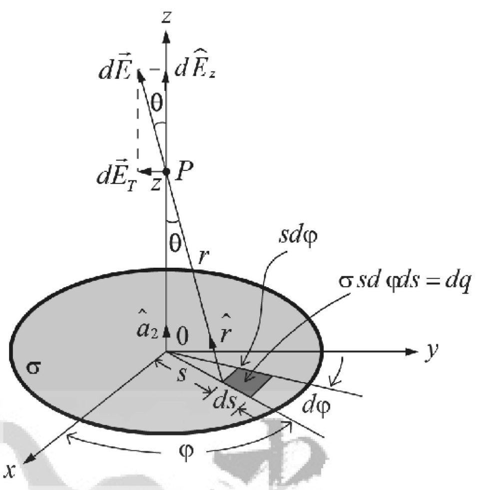


圖 1-17

取電荷基素 $dq = \sigma da = \sigma s d\varphi ds$

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\sigma s ds d\varphi}{r^2}\hat{a}_r$$

由於 $d\vec{E}$ 之方向 $\hat{a}_r$ 會隨 dq 位置的改變而改變, 故 $d\vec{E}$ 不能積分.

現將 $d\vec{E}$ 分成與 z-軸平行及垂直的二分量 $d\vec{E}_z$ 與 $d\vec{E}_T$.

即 $$d\vec{E} = \hat{a}_T dE_T + \hat{a}_z dE_z$$

$$\vec{E} = \hat{a}_T\int dE_T + \hat{a}_z\int dE_z$$

由電荷的對稱分佈得知, $\oint dE_T = 0$, 則

$$\vec{E} = \hat{a}_z\int dE_z = \hat{a}_z\int \cos\theta dE = \hat{a}_z\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_o}\iint\frac{\cos\theta s ds d\varphi}{r^2}$$

上式二重積分號內, 可以有二變數. 但此處除了 s 與 φ 為變數外, θ 與 r 值也會隨 dq 位置的改變而改變. 故 r 與 θ 亦為變數, 故二重積分號內共有四個變數, 須將之轉換成 s 與 φ .

由圖 1-17 得知

$$r=\sqrt{z^2+s^2} \qquad \cos\theta=\frac{z}{r}=\frac{z}{\sqrt{z^2+s^2}}$$

$$\vec{E}=\hat{a}_z\frac{\sigma z}{4\pi\varepsilon_o}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a\frac{sds}{(z^2+s^2)^{3/2}}$$

$$=\hat{a}_z(\frac{\sigma z}{4\pi\varepsilon_o})(2\pi)\left[-\frac{1}{\sqrt{z^2+s^2}}\right]_{s=0}^{s=a}$$

$$=\hat{a}_z(\frac{\sigma}{2\varepsilon_o})(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}})$$

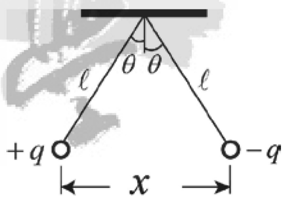
若電荷分佈於無限大平面, 即 $a\to\infty$時, 得

$$\vec{E}\cong\hat{a}_z\frac{\sigma}{2\varepsilon_o} \quad (注意:\ \vec{E}與z無關) \qquad (1\text{-}11)$$

由此結果得知, **若電荷均勻分佈於無限大平面上, 在面上方或下方任一位置產生的電場, 與該位置距電荷平面的垂直距離無關.**

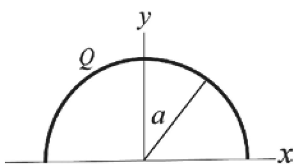
第 1 章庫倫定律與電場習題

1. 二質量均為 m, 帶電量均為+q 之小球, 以長度為ℓ之細線懸吊, 如右圖所示. 若θ甚小, 試證$x=(\frac{q^2\ell}{2\pi\varepsilon_o mg})^{\frac{1}{3}}$.



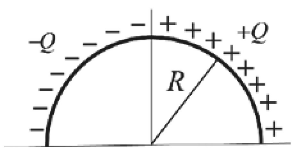
2. 電荷 Q 均勻分佈於半徑為 a 之半圓周長之細線上, 如右圖所示. 求曲率中心處之電場.

   Ans: $E=\frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_o a^2}$ 向下

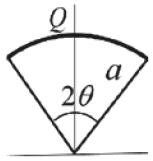


3. 右圖半徑為R的半圓周上, 右半部均勻分佈 +Q 之電量, 左半部均勻分佈 −Q 之電量. 求曲率中心之電場.

   Ans: $E=\frac{Q}{\pi^2\varepsilon_o R^2}$ 向左



4. 半徑為 a 之圓弧，兩端對曲率中心張開 θ_o 角，如右圖所示．有電量q均匀分佈與其上．求曲率中心之電場．



Ans: $E = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_o a^2 \theta_o} \sin\dfrac{\theta_o}{2}$ 向下

5. 電荷 Q 均匀分佈於半徑為 a 之盤面上，求在盤心與盤面垂直的軸上，距盤心 x 遠處之電場．

Ans: $E = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_o a^2}\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{a^2}{x^2}}}\right)$ 與盤面垂直

6. 兩塊帶電量相等但符號相反之平行板間，有均匀電場．一個電子從負電板之表面，自靜止往正電板表面加速．這段路程長 2.0 (cm)，花費 1.5×10^{-8} (s) 的時間．問 (a) 電子撞及正電板之速率為何? (b) 二電板間之電場大小為何?

Ans. (a) $v = 2.67\times10^{6}$ (m/s)， (b) $E = 1.01\times10^{3}$ (N/C)

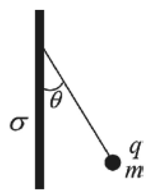
7. 現有二片大平板，上板帶負電，下板帶正電．二板間之均匀電場大小為E．有一個單擺，其擺錘的質量為 m，帶正 q 電之電量，懸吊於此電場中．(a) 求此單擺之週期．(b) 若上板帶正電，下板帶負電時，則單擺之週期為何?

Ans. (a) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g - \dfrac{qE}{m}}}$, (b) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g + \dfrac{qE}{m}}}$

8. 一個電偶極，電量之絕對值為 $q = 2\times10^{6}$ (C)，二電荷間之距離 $a = 0.1$ (cm)，置於 $E = 1\times10^{6}$ (N/C) 之均匀電場中．(a) 電偶極所受之最大力矩為何? (b) 用外力將電偶極自最大力矩處轉 180°，外力須作功若干?

(a) $\tau_{\max} = 4\times10^{-3}$ $(\mathrm{N}\cdot\mathrm{m})$, (b) $W_{ext} = 0$.

9. 一個質量為 m 之小球，帶有電量 q，用細線懸吊，與無限大導體平面夾 θ 角，如右圖所示．求導體表面上之表面電荷密度．



Ans. $\sigma = \dfrac{2\varepsilon_o mg\tan\theta}{q}$